折り紙で３次方程式が解ける？　～正７角形の折り方の謎にせまる～

２年Ｄ組　大須賀千宙　齊藤　航也
高原　　凌　多田　直矢
本多　一成

要約

長さや角度を測ることなく、紙を折るだけで正７角形を作ることができる。その仕組みについて数学的に解明しようと試みた結果、途中の折り方が３次方程式を解くことに相当していることが分かった。さらに、この事実を応用して、正９角形を折ることにも挑戦した。

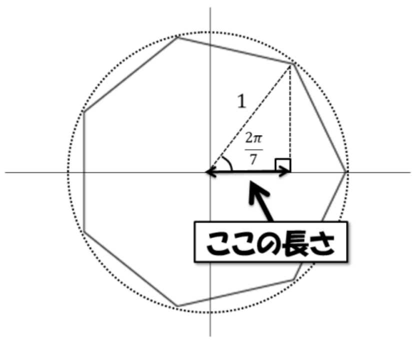
１．研究の動機

定規とコンパスのみでは作図できないことが証明されている正７角形を、折り紙で折ることができることに興味を持った。そして、その理由が「定規とコンパスでは２次方程式までしか解くことができないが、折り紙では３次方程式を解くことができるから」であることを知り、まずはその意味を解明しようと考えた。

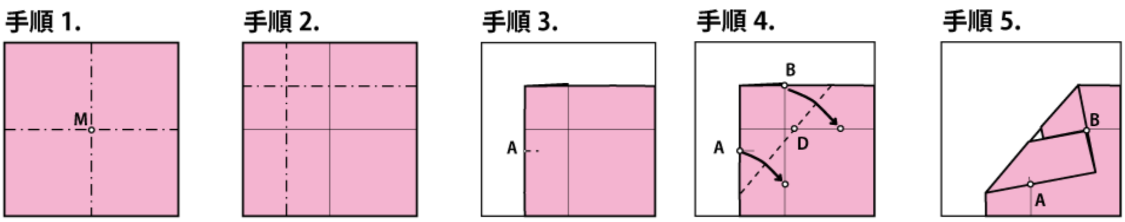
２．正七角形が定規とコンパスで作図できない理由

定規で引ける直線の方程式は１次式、コンパスで書ける円の方程式は２次式だから、定規とコンパスで作図できる長さ（作図可能数）は、１次または２次方程式の解として得られる数のみとなる。

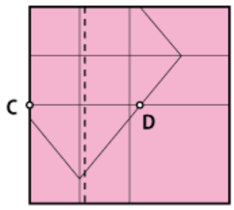
右図の矢印で表されている部分の長さ$(\cos\frac{2}{7}\pi)$は、２次方程式の解として求めることができない。したがって、正７角形は定規とコンパスで作図できないのである。



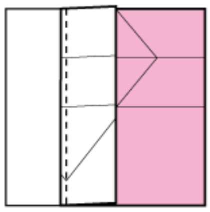
３．正七角形の折り方



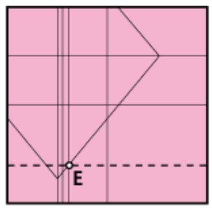
手順 6



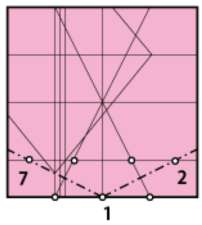
手順 7



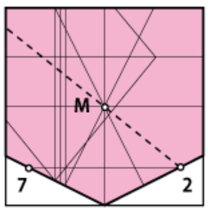
手順 8



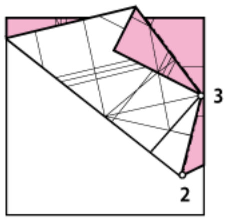
手順 9



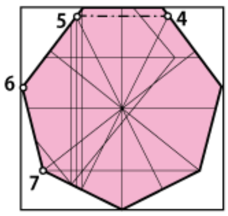
手順 10



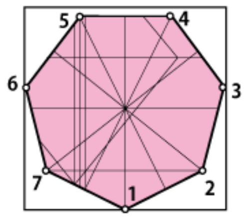
手順 11



手順 12



手順 13



手順 1　折り紙を２つ折りにして広げる。これを縦横２回行う。中点Ｍができる。

手順 2　上の辺を中央線に重ねて戻す。同様に左の辺を中央線に重ねて戻す。

手順 3　左の辺の中点を中点Ａとして、折り目をつけておく。

手順 4　図のように谷折りをして、２点Ａ，Ｂを折り目上に同時にのせ、図の点線のような「斜めの線」を作る。ここで点Ｄができる。

手順 5　「斜めの線」に折り目をしっかり付けて今まで折った部分を全て広げる。

手順 6　左の辺の中点Ｃを点Ｄに谷折りで重ね、点線部分の折り目を作る。

手順 7　図の点線に沿って折り目を付けるようにもう一度山折りし、広げる。

手順 8　手順７の「３本線」の１番右の線と、「斜めの線」が交わる点をＥとし、点Ｅを通るように下の辺を谷折りし折り目を作る。

手順 9　点Ｍを通る直線で折り、図の点１を、手順８でできた折り目の線に重ねる。これを左右両方で行い、点１が移った点を２、７とする。

手順 10　点１と点２を通る線、点１と点７を通る線で山折りする。

手順 11　点２と中点Ｍを通る線で谷折りし、点１が移った点を３、点７が移った点を４とする。また、点７と中点Ｍを通る線で谷折りし、点１が移った点を６、点２が移った点を５とする。

手順 12　図のように、隣り合う点を結ぶ線で山折りして正７角形の辺を作る。

手順 13　正７角形の完成。

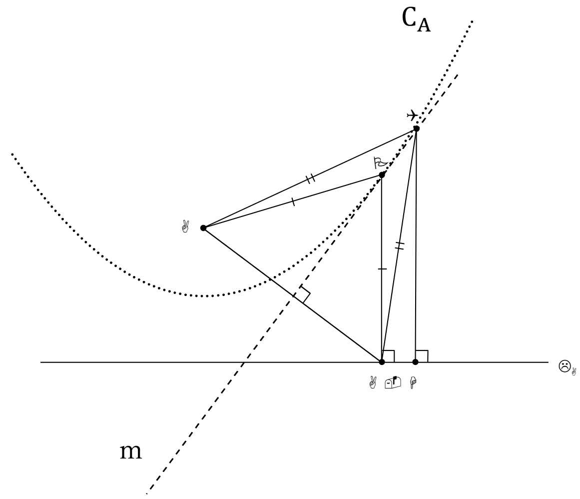
４．「斜めの線」の謎を解く

「折り紙で３次方程式が解ける」という言葉のポイントは手順４にあった。手順４は、点 A を直線L_A上の点 A’に、点 B を直線L_B上の点 B’に同時に置くということをやっている。

ポイント１

点 A を直線 $\mathrm{L_A}$ 上の点 A’に重ねるときの折り目の線は、「焦点が点 A、準線が直線 $\mathrm{L_A}$ の放物線の接線」となる。

放物線･･･点 F と F を通らない直線 ℓ とから等距離にある点の軌跡
（点 F を焦点，直線 ℓ を準線という）



折り目の線 m は線分ＡＡ’の垂直二等分線である。
AP=A’P より点 P は放物線$\mathrm{C_A}$上にある。
AQ=A’Q>HQ より点 Q は放物線$\mathrm{C_A}$上にない。
よって、放物線$\mathrm{C_A}$と直線 m の共有点は点 P のみである。
したがって直線 m は放物線C_Aの接線である。

このことから、点 A を直線L_A上の点 A’に、点 B を直線L_B上の点 B’に同時に置くときの折り目の線は、
「焦点が点 A で準線が直線L_Aである放物線C_A」と
「焦点が点 B で準線が直線L_Bである放物線C_B」の共通接線となる。

ポイント２

２つの放物線の共通接線の傾きは３次方程式の解である。

放物線の定義より
焦点 A (b, a)、準線 L_A：$y = -a$ である放物線 C_A の方程式は、$y = \frac{1}{4a}(x-b)^2$
焦点 B $(-d, -c)$、準線 L_B：$x = d$ である放物線 C_B の方程式は、$x = -\frac{1}{4d}(y+c)^2$
となる。

２つの放物線 C_A，C_B の共通接線 ℓ の方程式を $y = tx + s$ とすると、

C_A と ℓ が接する条件から　　$s = -at^2 - bt$ ・・・①

C_B と ℓ が接する条件から　　$s = \frac{d}{t} + c$ 　　・・・②

がそれぞれ成り立ち、①, ② から s を消去して整理すると、$at^3 + bt^2 - ct - d = 0$となる。よって共通接線 ℓ の傾き t は、３次方程式 $ax^3 + bx^2 - cx - d = 0$ の解となり、ℓ の方程式は　$y = tx - at^2 - bt$　と表される。

ポイント3

$\cos\frac{2}{7}\pi$ が解に現れる3次方程式は $x^3+x^2-2x-1=0$ である。

複素数平面（数学Ⅲ）の考え方を使う。

7次方程式　$z^7=1$・・・①　の解は、$z_k=\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}$　$(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$

であり、これらは複素数平面上の単位円に内接する正7角形の各頂点（頂点の1つは点1）である。

①は $z^7-1=0$すなわち　$(z-1)(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0$と変形できるから

6次方程式　$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1\ =0$・・・②　の解は

$$z_k=cos\frac{2k\pi}{7}+i\,sin\frac{2k\pi}{7}\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$$

である。

②の両辺を z^3 で割ると　$z^3+z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}=0$

$$\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0\text{・・・③}$$

ここで，$x=z+\frac{1}{z}$ とおくと

$$z^2+\frac{1}{z^2}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2\cdot z\cdot\frac{1}{z}=x^2-2$$

$$z^3+\frac{1}{z^3}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-3\cdot z\cdot\frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)=x^3-3x$$

であるから③より、　$(x^3-3x)+(x^2-2)+x+1=0$

すなわち　$x^3+x^2-2x-1=0$・・・④

xの　3次方程式④の解は

$x=z_k+\frac{1}{z_k}=\left(\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}\right)+\left(\cos\frac{2k\pi}{7}-i\sin\frac{2k\pi}{7}\right)=2\cos\frac{2k\pi}{7}$　$(k=1,\ 2,\ 3)$

の　3　個であり、そのうち正のものは　$x=2\cos\frac{2}{7}\pi$ のみである。

つまり、3次方程式 $x^3+x^2-2x-1=0$ の解に　$\cos\frac{2}{7}\pi$ が現れる。

3次方程式④は，ポイント2の$ax^3+bx^2-cx-d=0$ において$a=1, b=1, c=2, d=1$

としたものである。したがって、焦点（1，1）、準線 $y=-1$ の放物線 $\mathrm{C_A}$　と、

焦点（-1，-2）、準線 $x=1$ の放物線$\mathrm{C_B}$ の共通接線ℓ_1の傾きをt_1（$t_1>0$）とする

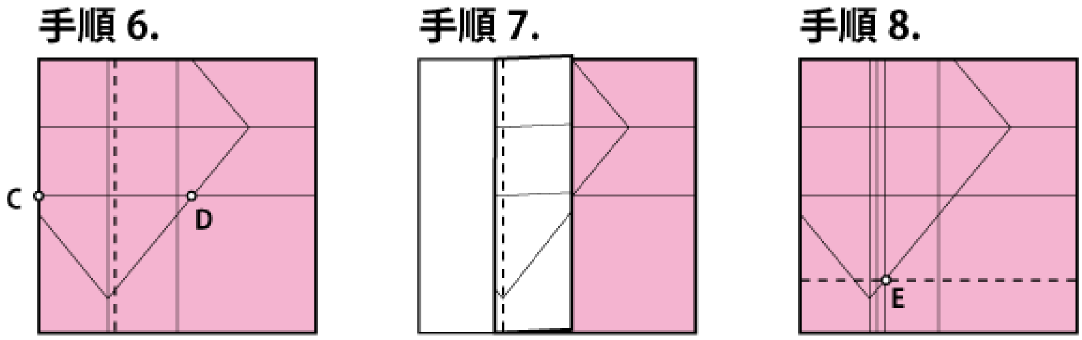
と、t_1 は３次方程式 $x^3+x^2-2x-1=0$の解であるから、$t_1=2\cos\frac{2}{7}\pi$ である。

また、 ℓ_1 の方程式は $y=t_1x-{t_1}^2-t_1$ である。ここで、放物線 C_A, C_B をそれぞれ x 軸方向に -1、 y 軸方向に １ だけ平行移動した放物線をそれぞれ C_A’, C_B’ とすると、

放物線 C_A’ の焦点は（0, ２)、準線は $y=$ 0 （x軸） であり、放物線 C_B’ の焦点は

(-2, -1)、準線は $x=$ 0 （y軸） となる。
放物線 C_A’, C_B’ の共通接線を ℓ’ とすると、 $\ell /\!/ \ell$’ より ℓ’ の傾きも $t_1=2\cos\frac{2}{7}\pi$ であり、 ℓ’の方程式は $y-1=t_1(x+1)-t_1^2-t_1$すなわち $y=t_1x-t_1^2+1$ である。

５.「３本線」の謎を解く



＜条件＞
・折り紙の一辺の長さを８とする。
・３本線を左から順に直線 a, b, c とし、この線と x 軸との交点を S, T, U とする。
・直線 $y=t_1x-t_1^2+1$と直線 c との交点を E とする。

＜解法＞
Ⅰ　点 U の座標を求める
直線 a はCMの中線より、ＣＳ＝ＭＳ＝２　…①
また、直線 b は CD の中線より、CT＝DT　…②
手順７より、ST＝TU で「点 S から点 U」の長さは、「点 M から点 D」と

同じで $t_1-\frac{1}{t_1}$ …③（ $t_1-\frac{1}{t_1}$は点 D の x 座標）

①, ②, ③より、DU は MS を x 軸方向に $t_1-\frac{1}{t_1}$だけ平行移動した線分となる。

よってＵ（ $t_1-\frac{1}{t_1}-2$, 0）

Ⅱ　点 E の座標を求める

y ＝ t_1 x － t_1^2＋1 に x＝ $t_1 - \frac{1}{t_1} - 2$（U の x 座標）を代入して y ＝－2 t_1　…④

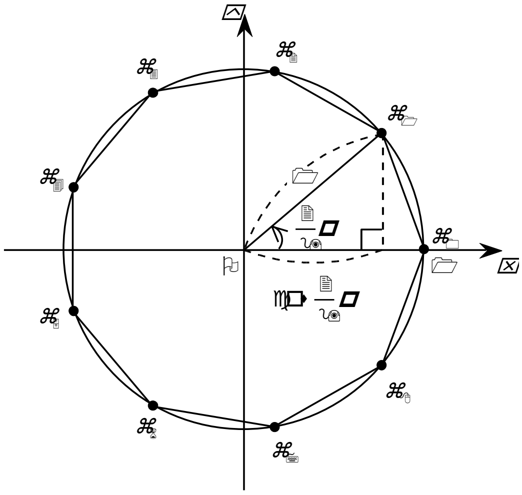
④を長さで表すと $t_1 = 2\cos\frac{2}{7}\pi$ より、2 $t_1 = 4\cos\frac{2}{7}\pi$　…⑤

⑤の長さが折れれば、後は対称性を利用して全ての頂点を求めることができ、正 7 角形を完成させることができる。

6　正 9 角形の折りかたを考察する

9 次方程式 $z^9 = 1$ ・・・① の解は

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{9} + i\sin\frac{2k\pi}{9} \quad (k = 0,1,2,3,4,5,6,7,8)$$



であり、これらは複素数平面上の単位円に内接する正 9 角形の各頂点（頂点の 1 つは点 1）である。

① は $z^9 - 1 = 0$すなわち

$$(z-1)(z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$$

と変形できるから、

8 次方程式

$$z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \quad ・・・②$$

の解は

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{9} + i\sin\frac{2k\pi}{9} \quad (k = 1,2,3,4,5,6,7,8)$$

である。

② の両辺を z^4 で割ると　$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} = 0$

$$\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) + \left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0 \quad ・・・③$$

ここで，$x = z + \frac{1}{z}$ とおくと

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 \cdot z \cdot \frac{1}{z} = x^2 - 2$$

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3 \cdot z \cdot \frac{1}{z}\left(z + \frac{1}{z}\right) = x^3 - 3x$$

$$z^4 + \frac{1}{z^4} = \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^2 - 2 \cdot z^2 \cdot \frac{1}{z^2} = (x^2 - 2)^2 - 2 = x^4 - 4x^2 + 2$$

したがって、③より$(x^4 - 4x^2 + 2) + (x^3 - 3x) + (x^2 - 2) + x + 1 = 0$

整理して　　　$x^4+x^3-3x^2-2x+1=0$・・・④

因数分解して　　$(x+1)(x^3-3x+1)=0$・・・⑤

４次方程式④ の解は　$x=2\cos\frac{2k}{9}\pi$ $(k=1,2,3,4)$ であるが、

$k=3$ のとき $x=2\cos\frac{2}{3}\pi=-1$ となるから、⑤より、３次方程式 $x^3-3x+1=0$ の正の解のうち大きい方が　$x=2\cos\frac{2}{9}\pi$ となる。
つまり、３次方程式 $x^3-3x+1=0$ の解に　$\cos\frac{2}{9}\pi$ が現れる。
したがって、放物線の焦点と準線を適切に定め、正 7 角形の折り方における手順４の折り方を行い、折り目の線の傾きが３次方程式 $x^3-3x+1=0$ の解になるようにすれば、正９角形を折り紙で折ることが可能となるはずである。

７　成果と今後の課題

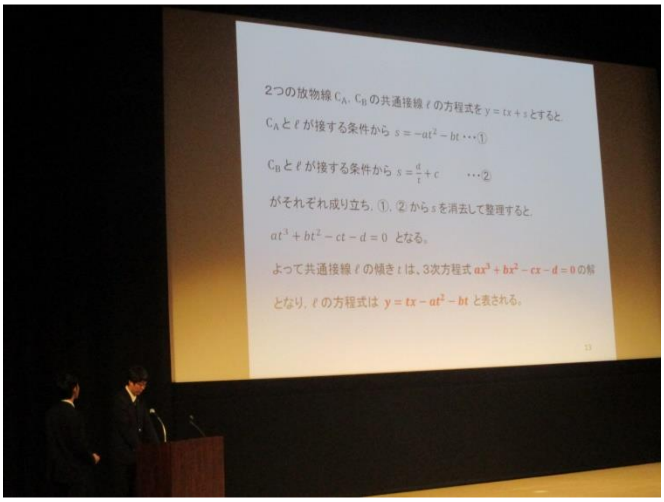
正７角形の折り方の手順や意味を数学的に解明できたことが成果である。手順４のように折ることで、折り目の線の傾きが 3 次方程式の解となることに驚いた。また、今回の研究をするに当たって数学Ⅲの知識が必要であり、先取りして学習することができたことが有意義であった。数学に対してさらに興味・関心が深まったので、今後の学習に生かしていきたい。

今後の課題は、正 9 角形を完成させることである。今回の考察により、理論的には正 7 角形と同様の方法で正 9 角形を折ることが可能なはずなので、今後機会を見つけてぜひ取り組んでみたい。

８　参考文献

・「折り紙で３次方程式が折れるわけ（前編）　- tsujimotter のノートブック」
〈http://tsujimotter.hatenablog.com/entry/origami-cubic-equation-1〉
・「折り紙で３次方程式が折れるわけ（後編）　- tsujimotter のノートブック」
〈http://tsujimotter.hatenablog.com/entry/origami-cubic-equation-2〉
・「正七角形の折り方：完成までの 14 のステップ - tsujimotter のノートブック」
〈http://tsujimotter.hatenablog.com/entry/2014/07/07/234101〉
・ロベルト・ゲレトシュレーガー　『折紙の数学』　森北出版, 2014 年
・「ギリシャの３大作図問題２Joh@物理のかぎプロジェクト」
〈http://hooktail.sub.jp/algebra/Greek3Probs2/index.pdf〉


年度　秋田県立由利高等学校　第２学年
「課 題 研 究」 発 表 会
折り紙で3次方程式が解ける？
～正７角形の折り方の謎にせまる～
由利高校数学班
大須賀千宙　齊藤航也　高原凌　多田直矢　本多一成


2つの放物線 C_A, C_B の共通接線 ℓ の方程式を $y = tx + s$ とすると,
C_A と ℓ が接する条件から $s = -at^2 - bt$ ･･･①
C_B と ℓ が接する条件から $s = \frac{d}{t} + c$ ･･･②
がそれぞれ成り立ち, ①, ② から s を消去して整理すると,
$at^3 + bt^2 - ct - d = 0$ となる。
よって共通接線 ℓ の傾き t は、3次方程式 $ax^3 + bx^2 - cx - d = 0$ の解
となり, ℓ の方程式は $y = tx - at^2 - bt$ と表される。
13