無理数を連分数展開した時の規則性

理数科２年Ｄ組 数学班
斎藤 雄介　　池田 瑠威　　今野 楓眞
柴田 京祐　　西原 一輝

要　旨

循環しない小数で表される無理数 $\sqrt{D}$ を連分数を使って表現すると、同じ構造を無限に繰り返す「循環連分数」として表すことができる。連分数展開において、$\sqrt{D}$ の小数部分が循環節をもつこと、2 次方程式の解で表される無理数 α が循環節をもつことを利用してその循環節の特徴を調べた。

◆ 連分数とは，次のような形をした分数のことである。

$$a_0+\cfrac{p_1}{a_1+\cfrac{p_2}{a_2+\cfrac{p_3}{a_3+\cfrac{p_4}{a_4+\ddots}}}}$$

ここでは， $p_1 = p_2 = \cdots = 1$ （正則） の場合を考え、以下のような形で表す。

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\ddots}}}}=[a_0\,;\,a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots\cdots]$$

また，無限に循環する数字（循環節）の上には上線を引いて表す。

$$[0\,;\,1,2,1,2,1,2,\cdots\cdots]=[0\,;\,\overline{1,2}]$$

（ ； の左側の数字はもとの数の整数部分，右側は小数部分となる）

１．研究の目的

無理数を連分数展開したときの循環性を見つけて一般化する。

２．研究テーマを選んだ動機・背景

素数の特性について研究しようとしたが断念した。素数をはじめとする様々な数の特性について調べていく過程で、循環しない小数で表される無理数を連分数展開すると規則的

な自然数の列で表すことができると知り、連分数の特性と無理数を連分数展開したときの自然数の列の規則性に興味をもった。

例えば，$\sqrt{5}$　は

小数で表すと　　$\sqrt{5}=2.2360679\cdots\cdots$

連分数で表すと　$\sqrt{5}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ddots}}}}=[2\,;\,4,4,4,4,\cdots\cdots]$

となる。

◆連分数展開の方法（式変形）

＜有理数の連分数展開＞

$$\frac{25}{9}=2+\frac{7}{9}=2+\cfrac{1}{\cfrac{9}{7}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{7}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{7}{2}}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}=[2\,;\,1,3,2]$$

＜無理数の連分数展開＞

$$\sqrt{3}=1+(\sqrt{3}-1)=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{3}-1}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{3}+1}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+(\sqrt{3}-1)}}$$

$$=\cdots\cdots=[1\,;\,1,2,1,2,1,2,\cdots\cdots]$$

$$=[1\,;\,\overline{1,2}]$$

３．研究の意義

循環しない小数で表される無理数を連分数（規則的な自然数の列）で表すことができれば、無理数の小数部分は連分数を計算することで求めることが出来るようになる。

また、循環するパターンがわからない無限小数を有理数で近似することが出来る。

４．研究方法

$n<\sqrt{D}<n+1$　を満たす無理数

$\sqrt{n^2+1}$，　$\sqrt{n^2+2}$，　$\sqrt{n^2+3}$，　$\cdots\cdots$　，　$\sqrt{n^2+2n-1}$，　$\sqrt{n^2+2n}$

をそれぞれ連分数展開することで現れる自然数とその循環節の特徴を調べて証明する。

5. 研究結果

規則性１：　$\sqrt{n^2+1}=[n\ ;\ \overline{2n}\ ]$

証明）

$\alpha=\sqrt{n^2+1}-n$　とおくと，　$\alpha+2n=\sqrt{n^2+1}+n$

$\alpha(\alpha+2n)=1$

$\alpha=\dfrac{1}{2n+\alpha}=[0\ ;\ \overline{2n}\ ]$

$\sqrt{n^2+1}-n=[0\ ;\ \overline{2n}\ ]$

$\sqrt{n^2+1}=[n\ ;\ \overline{2n}\ ]$

規則性２：　$\sqrt{n^2+2}=[n\ ;\ \overline{n\ ,2n}\ ]$

証明）

$\alpha=\sqrt{n^2+2}-n$　とおくと，　$\alpha+2n=\sqrt{n^2+2}+n$

$\alpha(\alpha+2n)=2$　$\cdots\cdots(*)$

$\alpha=\dfrac{2}{2n+\alpha}=\dfrac{1}{n+\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1}{n+\dfrac{1}{\dfrac{2}{\alpha}}}=\dfrac{1}{n+\dfrac{1}{2n+\alpha}}$　　$(*)$ から $\dfrac{2}{\alpha}=2n+\alpha$

$=[0\ ;\ \overline{n\ ,2n}\ ]$

したがって　$\sqrt{n^2+2}-n=[0\ ;\ \overline{n\ ,2n}\ ]$

よって　$\sqrt{n^2+2}=[n\ ;\ \overline{n\ ,2n}\ ]$

規則性３：　$\sqrt{n^2+n}=[n\ ;\ \overline{2\ ,2n}\ ]$（ $n\geqq 2$ のとき ）

証明）

$\alpha=\sqrt{n^2+n}-n$　とおくと，　$\alpha+2n=\sqrt{n^2+n}+n$

$\alpha(\alpha+2n)=n$　$\cdots\cdots(*)$

$\alpha=\dfrac{n}{2n+\alpha}=\dfrac{1}{2+\dfrac{\alpha}{n}}=\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\dfrac{n}{\alpha}}}=\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2n+\alpha}}$　　$(*)$ から $\dfrac{n}{\alpha}=2n+\alpha$

$=[0\ ;\ \overline{2\ ,2n}\ ]$

したがって　$\sqrt{n^2+n}-n=[0\ ;\ \overline{2\ ,2n}\ ]$

よって　$\sqrt{n^2+n}=[n\ ;\ \overline{2\ ,2n}\ ]$

規則性４： $\sqrt{n^2+2n}=[n\,;\,\overline{1\,,2n}\,]$

証明） $\alpha=\sqrt{n^2+2n}-n$ とおくと， $\alpha+2n=\sqrt{n^2+2n}+n$

$\alpha(\alpha+2n)=2n$ ……(*)

$$\alpha=\frac{2n}{2n+\alpha}=\frac{1}{1+\dfrac{\alpha}{2n}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{2n}{\alpha}}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{2n+\alpha}}$$

(*) から $\dfrac{2n}{\alpha}=2n+\alpha$

$=[0\,;\,\overline{1\,,2n}\,]$

したがって $\sqrt{n^2+2n}-n=[0\,;\,\overline{1\,,2n}\,]$

よって $\sqrt{n^2+2n}=[n\,;\,\overline{1\,,2n}\,]$

規則性５： $\sqrt{n^2+2n-1}=[n\,;\,\overline{1\,,n-1\,,1\,,2n}\,]$（ $n\geqq 2$ のとき ）

証明） $\alpha=\sqrt{n^2+2n-1}-n$ とおくと， $\alpha+2n=\sqrt{n^2+2n-1}+n$

$\alpha(\alpha+2n)=2n-1$ ……(*)

$$\alpha=\frac{2n-1}{2n+\alpha}=\frac{1}{\dfrac{2n+\alpha}{2n-1}}=\frac{1}{\dfrac{2n-1+1+\alpha}{2n-1}}=\frac{1}{1+\dfrac{1+\alpha}{2n-1}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{2n-1}{1+\alpha}}}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
(*)\text{ から}\quad (\alpha+1)(\alpha+2n-1)=2(2n-1)\\[4pt]
\qquad \dfrac{2n-1}{1+\alpha}=\dfrac{\alpha+2n-1}{2}=\dfrac{2(n-1)+1+\alpha}{2}=n-1+\dfrac{1+\alpha}{2}\\[8pt]
\qquad \dfrac{2}{1+\alpha}=\dfrac{\alpha+2n-1}{2n-1}=1+\dfrac{\alpha}{2n-1}
\end{array}\right.$$

$$=\frac{1}{1+\dfrac{1}{n-1+\dfrac{1+\alpha}{2}}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{n-1+\dfrac{1}{\dfrac{2}{1+\alpha}}}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{n-1+\dfrac{1}{1+\dfrac{\alpha}{2n-1}}}}$$

$$=\frac{1}{1+\dfrac{1}{n-1+\dfrac{1}{1+\dfrac{\alpha}{2n-1}}}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{n-1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{2n-1}{\alpha}}}}}$$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{n-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2n+\alpha}}}}$$

$\alpha(\alpha+2n)=2n-1$ …… $(*)$ から

$$\frac{2n-1}{\alpha}=2n+\alpha$$

$$=[0\,;\,\overline{1\,,\,n-1\,,\,1\,,\,2n}\,]$$

したがって　$\sqrt{n^2+2n-1}-n=[0\,;\,\overline{1\,,\,n-1\,,\,1\,,\,2n}\,]$

よって　$\sqrt{n^2+2n-1}=[n\,;\,\overline{1\,,\,n-1\,,\,1\,,\,2n}\,]$

６．今後の展望と課題

・規則性を示すことができなかった $\sqrt{n^2+3}$ ， $\sqrt{n^2+4}$ などの無理数は、連分数展開の式変形の中で、整数部分と小数部分にうまく分解することができなかった。 $\sqrt{n^2+k}$ の形をした無理数は、整数部分のｎとkの関係性が循環節の長さに関係しているようなので、その特徴も調べてみたい。

・連分数が他の分野とどのような関連性があるのか調べていきたい。

７．引用・参考文献

「数論入門」（講談社）　作者　芹沢正三

「連分数の不思議」（講談社）　作者　木村俊一